ENAC

C. EXT. I.E.E.A.C. (CF et CT) 1982

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (4 h)

N.B. - Les cinq parties du problème sont indépendantes, à part l'utilisation, dans la partie III, d'éléments a_n définis dans la partie II.

I

Soit l'équation différentielle (E) : $xy'' - 2y' + xy = 0$, où y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x.

Chercher les solutions de (E) développables en séries entières de la forme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$, où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle. Indiquer leur rayon de convergence et en déduire la solution générale de (E).

II

1°) Etudier la fonction g , réelle de la variable réelle définie par : $x \longrightarrow g(x) = \sin x - x \cos x$. Soit Γ son graphe dans un plan affine rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Préciser sur quelles courbes simples se situent les points de Γ à tangente parallèle à l'axe $(0, \vec{i})$. Montrer que les intersections de Γ avec cet axe constituent une famille dénombrable de points. On appelle dorénavant A l'ensemble des abscisses positives de ces points d'intersection. Montrer qu'on peut ordonner les éléments de A en une suite notée $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, strictement croissante, telle que : pour tout n entier strictement positif on ait :

$$n\pi < a_n < n\pi + \frac{\pi}{2} .$$

Dessiner avec précision la partie Γ_o de Γ qui correspond à la variation de x sur $[0, 2\pi]$ - on pourra prendre 2 cm comme unité sur les axes de coordonnées -

2°) Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par Γ_o , l'axe $(0, \vec{i})$ et situé dans le demi-plan qui correspond à $y \geqslant 0$. On donnera l'expression de cette aire en fonction de a_1. On suppose maintenant que le domaine $\mathcal{D}$ tourne autour de l'axe $(0, \vec{i})$ et engendre ainsi, dans l'espace affine euclidien de dimension trois, un solide de révolution. Donner en fonction de a_1 l'expression du volume de ce solide. (fonction rationnelle de a_1).

III

1°) A tout n de $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, on associe l'élément a_n de l'ensemble A , défini dans la partie II. A tout couple $(a_n , a_p) \in A^2$ on associe alors l'intégrale $I_{np} = \int_o^1 \sin(a_n x) \sin(a_p x)\, dx$. Calculer I_{np} en distinguant deux cas selon que n est différent de p , ou que n = p ; dans ce deuxième cas, on donnera l'expression de I_{nn} d'abord en fonction de $\sin a_n$, puis sous forme d'une fonction rationnelle de a_n .

2°) Soit un n - uple de réels : $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$. Soit f_n la fonction réelle, définie, pour x décrivant $[0, 1]$, par $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin(a_k x)$

Soit d'autre part f une fonction donnée continue sur $[0, 1]$.

On pose : $b_k = \int_o^1 f(x) \sin(a_k x)\, dx$, et $B = \int_o^1 [f(x)]^2\, dx$.

Calculer en fonction de B et des réels a_k , b_k et λ_k (k : de 1 à n) ,

.../...

l'intégrale $F(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) = \int_0^1 [f(x) - f_n(x)]^2 \, dx$. Montrer que :

$F(\lambda_1 \ldots, \lambda_n) \geqslant B - \sum_{k=1}^{n} \frac{2 b_k^2}{\sin^2 a_k}$.

3°) Si on considère maintenant F comme une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, montrer que F admet un minimum absolu et indiquer pour quelle valeur du n - uple $(\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n)$ ce minimum est atteint.

En déduire la nature de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k^2 (1 + a_k^2)}{a_k^2}$.

IV

1°) On s'intéresse maintenant à la fonction f définie par :

$f(x) = \alpha \cos \frac{\pi x}{2} + \beta \cos \frac{3\pi x}{2} + \gamma \cos \frac{5\pi x}{2}$, pour (α, β, γ) un triplet de réels donné, et on appelle ϕ la primitive de f qui prend la valeur 0 pour x = 0. On pose encore $B = \int_0^1 [f(x)]^2 \, dx$ (c'est-à-dire $\int_0^1 [\phi'(x)]^2 \, dx$) et, d'autre part, $S = \int_0^1 \phi(x) \, f(x) \, dx$ (c'est-à-dire $\int_0^1 \phi(x) \, \phi'(x) \, dx$). Exprimer S et B en fonction de α, β, γ.

2°) On peut interpréter (α, β, γ) comme le triplet des composantes, dans un espace euclidien, rapporté à une base orthonormée, d'un certain vecteur $\vec{V}$. Montrer qu'alors on peut exprimer S en fonction du produit scalaire de $\vec{V}$ par un vecteur $\vec{U}$ indépendant de (α, β, γ), et B en fonction de $\|\vec{V}\|$ (norme euclidienne de $\vec{V}$). En déduire qu'il existe des réels r tels que, quel que soit $\vec{V}$, on ait $S \leqslant r B$. Montrer qu'il en existe un, minimum, qu'on notera r_o, dont on donnera une valeur numérique à 10^{-5} près, et qu'il existe des triplets $(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ tels que $S = r_o B$. Donner la forme générale de ces triplets $(\alpha_o, \beta_o, \gamma_o)$ et montrer que ces triplets donnent à ϕ et f un signe constant quand x décrit le segment $[0, 1]$.

V

Soit a et b deux réels donnés vérifiant $a < b$. On considère $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques à dérivée continue sur $[a, b]$ et telles que $y(a) = 0$.

1°) Montrer que $\forall y \in \mathcal{F}$ et $\forall x \in [a, b]$ on a $|y(x)| \leqslant \int_a^x |y'(t)| \, dt$, puis que

$$\int_a^b |y(x) \, y'(x)| \, dx \leqslant \int_a^b \left(\int_a^x |y'(t)| \, dt \right) |y'(x)| \, dx. \qquad (1)$$

2°) Exprimer $\int_a^b \left(\int_a^x |y'(t)| \, dt \right) |y'(x)| \, dx$ en fonction de $\int_a^b |y'(x)| \, dx$.

3°) En remarquant que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $T(\lambda) = \int_a^b (|y'(x)| - \lambda)^2 \, dx$ est positif ou nul, montrer que

$$\left[\int_a^b |y'(x)| \, dx \right]^2 \leqslant (b-a) \int_a^b [y'(x)]^2 \, dx . \qquad (2)$$

Déduire des questions précédentes et des inégalités (1) et (2) que $\forall y \in \mathcal{F}$

$$\int_a^b y(x) \, y'(x) \, dx \leqslant \frac{b-a}{2} \int_a^b [y'(x)]^2 \, dx. \qquad (3)$$

4°) Montrer que l'inégalité (2) est une égalité si et seulement si y est une fonction affine de $\mathcal{F}$ et qu'il en est de même pour (3).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail